

1. (60 puntos) Una empresa fabrica tres productos A, B y C (unidades continuas) para los cuales tiene una restricción en la disponibilidad de recursos y una restricción de demanda mínima conjunta entre los tres productos, según se muestra en la tabla adjunta, en la que también se consignan los beneficios unitarios de los tres productos.

**Observación importante: respetar el orden de las restricciones tal como están en la tabla adjunta**

Producto	A	B	C	RHS
Demanda mínima (u.)	1	1	1	350
Mano de Obra (H_H)	5	2	1	950
Materia prima (kg)	4	6	2	850
Beneficio unitario (\$/u)	4	1	3	

De la resolución del problema con el Método Simplex, con el objetivo de maximizar los beneficios, se ha llegado a la tabla óptima que también se adjunta.

Ck	Xk	B	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>
0	X5	525	3	-1	0	0	1	-1/2
0	X4	75	1	2	0	1	0	1/2
3	X3	425	2	3	1	0	0	1/2
	Z = 1.275		2	8	0	0	0	3/2

Se pide responder claramente las siguientes preguntas:

- 1) Cuál es el beneficio mínimo que debería tener el producto A para que convenga producirlo?
- 2) Qué variación experimentaría el sobrante de mano de obra si la disponibilidad de materia prima fuera de 849 kg?
- 3) Qué variación experimentaría la cantidad de unidades a producir de C si se elabora una unidad de A?
- 4) Cuál es el límite superior e inferior del coeficiente c<sub>3</sub> de x<sub>3</sub> dentro de los cuales no se altera la estructura de la solución óptima hallada?
- 5) Cuál es el límite superior e inferior del coeficiente c<sub>2</sub> de x<sub>2</sub> dentro de los cuales no se altera la estructura de la solución óptima hallada?
- 6) Cuál es el beneficio mínimo que debería tener un producto que participa en la restricción de producción mínima conjunta y requiere 3 H-H/u y 4 kg/u de materia prima para que convenga producirlo?
- 7) Qué variación experimentaría el funcional si la restricción de producción mínima conjunta fuera de 300u.?
- 8) Cuál sería el valor del funcional si la disponibilidad de mano de obra fuera de 700H-H? Justificar
- 9) Pasar del planteo directo al planteo dual y armar la tabla inicial del dual (no omitir pasos)
- 10) Pasar la tabla óptima del directo dada a la tabla óptima del dual
- 11) Hallar los límites dentro de los cuales puede variar la disponibilidad de mano de obra sin que se altere la estructura de la solución óptima dual hallada
- 12) Cuál es el monto mínimo al que se justificaría vender 600kg de materia prima a un tercero interesado?
- 13) Comprobar si se modifica la estructura de la solución óptima dual hallada en el punto 10) si se agrega una restricción de disponibilidad de 800 kg. de un material Q. Los coeficientes tecnológicos de los productos son: 4, 3 y 2kg/u de Q respectivamente.
- 14) Si se respondió en forma positiva la pregunta anterior, hallar la nueva solución óptima del dual

1) Una empresa fabrica tres productos A, B y C (unidades continuas) para los cuales tiene una restricción en la disponibilidad de recursos y una restricción de demanda mínima conjunta entre los tres productos, según la sig. tabla, en la que se consignan, además, los beneficios unitarios de los tres productos

Producto	A	B	C	RHS
Demanda Mínima (u)	1	1	1	350
Mano de obra (H)	5	2	1	950
Materia Prima (Kg)	4	6	2	850
Beneficio unit. (H)	4	1	3	

De la resolución del problema con el método Simplex, con el objetivo de MAXIMIZAR LOS BENEFICIOS, se llegó a la tabla óptima:

Obj	$x_k$	$b_k$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
0	$x_5$	525	3	-1	0	0	1	-1/2
0	$x_4$	75	1	2	0	1	0	1/2
3	$x_3$	425	2	3	1	0	0	1/2
$Z = 1.275$			2	8	0	0	0	3/2

Se pide responder claramente:

1) ¿Cuál es el beneficio mínimo que debería tener el producto A para que convenga producirlo?

A no está en la base  $\rightarrow$  tiene costo de oportunidad = \$2 } \$6  
 beneficio en el funcional ( $x_i$ ) = -\$4

El beneficio mínimo para que convenga producir A es \$6

2) ¿Qué variación experimentaría el sobrante de mano de obra si la disponibilidad de la mat. prima fuera \$849?

Sobrante M.O actual 525 ( $x_5$ )  
 Mat. Prima actualizada ( $x_5$  no está en la base)

exceso  $x_5 = 525,5$  H

Costo op:  $3/2$   $\rightarrow$  si tengo 1kg menos  $\rightarrow$  tengo 1/2 hora más de M.O

3) ¿Qué variación experimental de la cont de unidades de C si se elabora una unidad de A? a producir  $x_3$

Columna A<sub>1</sub> →  $x_5 \rightarrow 3$   
 $x_4 \rightarrow 1$   
 $x_3 \rightarrow 2$  → Si hago 1 unidad de A hago 2 menos de C  
 $2 \rightarrow$  costo de op. de A

$C = 425 - 2 = 423 = C$

4) ¿Cuál es el límite superior e inferior del coef.  $c_3$  de  $x_3$  dentro de los cuales no se altera la estructura de la sol. óptima?

$C_{3 \text{ sup}} \rightarrow$  Busco -  $\rightarrow$  No hay  $\rightarrow C_{3 \text{ sup}} = +\infty$

$C_{3 \text{ inf}} \rightarrow$  Busco +  $\rightarrow$  hay 3  $\rightarrow C_{3 \text{ inf}} = 3 - \left[ \frac{2}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} \right]_{\text{min}}$

$C_{3 \text{ inf}} = 3 - 1 = 2 = C_{3 \text{ inf}}$

	Max	Min
sup	-	+
inf	+	-

5) ¿Cuál es el límite sup e inf del coef.  $c_2$  de  $x_2$  dentro de los cuales no se altera la estructura de la sol. óptima?

$x_2$  es no básica  $\rightarrow$  beneficio en el funcional :  $c_2 = 1$   
 $\rightarrow$  costo de oportunidad  $\frac{8}{3}$

$C_{2 \text{ inf}} = -\infty$        $C_{2 \text{ sup}} = 9$

6) ¿Cuál es el beneficio mínimo que debe tener un producto que participa en la restricción de producción mínima conjunta y requiere 3 HT/u y 4 kg/u de MP para que converja producirlo?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 350 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 950 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 850 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 350 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 950 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 850 \end{cases}$$

MAX  $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$

$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = y_2$

$y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 6$

**Beneficio mínimo = \$6**

7) ¿Qué variación experimental de el funcional si la restricción de producción mínima fuera de 300 u?

Se están produciendo  $\frac{425}{350 + 75}$  unidades (todas de C). Si se relaja la restricción a 300 u, no varía el funcional (se está produciendo 425 unidades de C y "sobrección" 175 u)

8) ¿cuál sería el valor del funcional si la disponibilidad de MO fuera de 700 HH?

Mano de obra está representada por  $X_5$ . tiene solamente de 525 horas así que si en lugar de 950 tengo 700 (250 horas menos) no varía el funcional

9) Pasar del planteo directo al planteo dual y armar la tabla inicial del dual (no omitir  $M$ 's)

Planteo directo → F. Condición

$$\begin{cases} \text{dem} & \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \geq 350 \\ 5X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 950 \\ \text{MO} & 4X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 850 \end{cases} \\ \text{MP} & \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -X_1 - X_2 - X_3 \leq 350 \\ 5X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 950 \\ 4X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 850 \end{cases}$$

$Z = 4X_1 + X_2 + 3X_3$  MAX

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Dual

$$\begin{cases} -y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 4 \\ -y_1 + 2y_2 + 6y_3 \geq 1 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$Z = -350y_1 + 950y_2 + 850y_3$  MIN

$$\begin{cases} -y_1 + 5y_2 + 4y_3 - y_4 + \mu_1 = 4 \\ -y_1 + 2y_2 + 6y_3 - y_5 + \mu_2 = 1 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 - y_6 + \mu_3 = 3 \end{cases}$$

$Z = -350y_1 + 950y_2 + 850y_3 + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3$

	$C_B$		350	950	850	0	0	0	M	M	M	
$C_N$	$C_N$	$B_N$	$A'_1$	$A'_2$	$A'_3$	$A'_4$	$A'_5$	$A'_6$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	br/ase
M	$\mu_1$	4	-1	5	4	-1			1			1
M	$\mu_2$	1	-1	2	6		-1			1		1/6
M	$\mu_3$	3	-1	1	2			-1			1	3/2
$Z =$			350-3M	8M-950	12M-850	-M	-M	-M	0	0	0	sale $\mu_2$

entra  $y_3$

10) Pasar la tabla óptima del directo dada a la tabla óptima del dual

directo

$C_j$	$X_j$	$B_j$	$A_{1j}$	$A_{2j}$	$A_{3j}$	$A_{4j}$	$A_{5j}$	$A_{6j}$
0	$X_5$	525	3	-1			1	-1/2
0	$X_4$	75	1	2		1		1/2
3	$X_3$	425	2	3	1			1/2
$Z = 1275$			2	8	0	0	0	3/2

$y_4$   $y_5$   $y_6$   $y_1$   $y_2$   $y_3$   
 $-350$   $950$   $850$

dual

$C_j$	$y_j$	$B_j$	$A_{1j}$	$A_{2j}$	$A_{3j}$	$A_{4j}$	$A_{5j}$	$A_{6j}$
0	$y_4$	2	$-1$	-3		1		-2
0	$y_5$	8	-2	1			1	-3
850	$y_3$	3/2	-1/2	$+1/2$	1			-1/2
$Z = 1275$			-75	-525	0	0	0	-425

$Z = 1050$   $\downarrow$   $x_1$   $\uparrow$   $x_5$   $\uparrow$   $x_6$   $x_1$   $x_2$   $x_3$

	$M$	$m$
S	-	+
x	+	-

11) Hallar los límites dentro de los cuales puede variar la disponibilidad de  $M_0$  sin que se altere la estructura de la solución dual óptima hallada.

$M_0 \rightarrow y_2 \rightarrow$  es NO básica  $\rightarrow C_2 \text{ sup} = \infty$

$C_2 \text{ inf} = 950 - 525 = 425$

$C_2 \text{ inf} = 425$

$N_b$   $M$   $m$   
 $\Delta$   $+$   $+$   
 $x$   $-$   $|c_j| - (z_j - c_j)$

12) ¿Cuál es el monto mínimo al que se justificarse vender los logs de materia prima a un tercero interesado?

MP  $\rightarrow y_3$   
 $X_6$   $\text{vinc. } 0 \rightarrow 83$   
 busca  $\text{lim inferior} \rightarrow C_3 \text{ inf} = \text{hay 2 neg} \rightarrow \left[ \frac{75}{1/2}; \frac{425}{1/2} \right]_{\text{min}}$

$C_3 \text{ inf} = 850 - 150 = 700$

$\text{lim sup (+)} \rightarrow C_3 \text{ sup} = 850 + \frac{525}{1/2} = 1900 \rightarrow \text{entre } y_2 \text{ sale } y_3$

$700 \leq C_3 \leq 1900 \rightarrow B_{12} = 3/2$

$C_3 > 1900 \rightarrow B_{12} = 0$

13) Comprobar si se modifica la estructura de la sol. óptima dual hallada en el punto 10) si se agrega una restricción de disponibilidad de 800 kg de un material A.

Las coef. tecnológicos de los productos son 4, 3 y 2 kg/m de A resp.

directo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 350 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 950 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 850 \end{cases}$$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 800$

tabla ópt →  $x_1 = 0$   
 $x_2 = 0$   
 $x_3 = 425$

$4 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 425 \leq 800 ?$

$850 \leq 800 ?$  NO ⇒ varía la tabla ópt dual

14) Si se respondió en forma afirmativa a la preg anterior, hallar la nueva solución óptima del dual

tabla original dual:  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$   $\rightarrow$   $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

CR	Var	Bm	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
0	y <sub>4</sub>	2	-1	-3		1		-2	0
0	y <sub>5</sub>	8	-2	1			1	-3	3
850	y <sub>3</sub>	3/2	-1/2	1/2	1			-1/2	1
Z = 1275			-75	-525	0	0	0	-425	50

↑ tabla y<sub>3</sub>  
 ↑ entre x<sub>2</sub>

tabla dual:

CR	Var	Bm	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
0	y <sub>4</sub>	2	-1	-3	0	1	0	-2	0
0	y <sub>5</sub>	7/2	-1/2	-1/2	-3	0	1	-3/2	0
800	y <sub>7</sub>	1,5	-1/2	1/2	1	0	0	-1/2	1
Z = 1200			-450	-150	-50	0	0	-400	0